ČVUT
ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE

Youla-Kučerova parametrizace. Co to je?

Vladimír Kučera
Český institut informatiky, robotiky a kybernetiky ČVUT
Ústav teorie informace a automatizace AV ČR

Slavnostní přednáška při příležitosti 50 let nepřetržitého pracovního poměru.

Úvod

Moderní teorie řízení se ve stále větší míře opírá o algebru.

Algebraický formalismus totiž nabízí řadu matematických nástrojů pro návrh zpětnovazebních systémů řízení, včetně tak zvané metody zlomků.

Úvod

Tato metoda je založena na přenosových vlastnostech systémů.
Základní myšlenka je považovat přenos systému
za prvek podílového tělesa vhodného okruhu.

Tento krok je zcela přirozený pro lineární systémy,
jejichž přenos je racionální,
to jest pro systémy se soustředěnými parametry.
Ale za určitých podmínek bude tento přístup produktivní
i pro systémy s neracionálním přenosem, tedy s rozprostřenými parametry.

Úvod

Ve většině případů je vyžadováno, aby systém řízení byl stabilní a případně splňoval další požadavky, jako optimalitu nebo robustnost. Je proto zcela přirozené navrhovat systém postupně, krok za krokem: nejprve zajistit stabilitu a pak další požadované vlastnosti jednu po druhé.

Pro tento postup je však nutné mít k dispozici vždy všechna řešení daného kroku dříve, než přistoupíme ke kroku následujícímu.

Úvod

A to je právě motivace pro
parametrické vyjádření všech regulátorů, které daný systém stabilizují.
Tento výsledek umožnil postupný návrh zpětnovazebních systémů řízení a vtisknul teorii optimálního a robustního řízení zcela nový směr výzkumu.
Požadavky nad rámec stability lze totiž zajistit vhodným výběrem parametru.
Klíčové přitom je, že přenos uzavřené smyčky závisí na tomto parametru lineárně, takže splnění dalších požadavků se zjednodušuje.

Úvod

Přednáška provede posluchače algebraickými metodami syntézy zpětnovazebních systémů řízení.

Připomene historii vzniku parametrizace stabilizujících regulátorů, dnes běžně nazývané jako Youla-Kučerova parametrizace.

Úvod

Přednáška vysvětlí použití parametrizace při standardních úlohách syntézy, kdy požadujeme sledování referenčního signálu, potlačení poruchy, specifické umístění pólů systému, dosažení konečné impulzní odezvy, optimalizaci norem l_1 nebo H_2 vybraných signálů, robustní stabilizaci, nebo robustní umístění pólů systému.
Mezi nestandardní aplikace této parametrizace patří například
stabilizace systému při omezené amplitudě vstupů,
redukce překývnutí odezvy systému, nebo
návrh stabilizujících regulátorů daného řádu.

Signály

Signál je funkce f: $T \rightarrow A$, kde T je osa signálu a A je obor hodnot.

Budeme se zabývat dynamickými systémy, pro které T je čas.

Jestliže T je spočetná množina časových okamžiků ($T := Z$, celá čísla),
f je signál v diskrétním čase.
Jestliže T je interval časových okamžiků ($T := R$, reálná čísla),
f je signál ve spojitém čase.

Signály

Velikost signálu měříme normou.

Pro signál $f(t)$ ve spojitém čase (řekněme lokálně integrovatelná funkce) norma L_p

$$\| f \|_{L_p} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} | f(t) |^p \, dt \right]^{1/p} \quad \text{if } 1 \le p < \infty$$

$$\| f \|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{t \ge 0} | f(t) | \quad \text{if } p = \infty.$$

Množina funkcí f takových, že $\| f \|_{L_p} < \infty$ tvoří prostor L_p.

Signály

Pro signál v diskrétním čase

$$f(k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k \Delta(k), \quad \Delta(k) \text{ jednotkový impuls}$$

norma l_p

$$\| f \|_{l_p} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} | f_k |^p \right]^{1/p} \quad \text{if } 1 \leq p < \infty$$

$$\| f \|_{l_\infty} = \sup_{k \geq 0} | f_k | \quad \text{if } p = \infty.$$

Množina funkcí f takových, že $\| f \|_{l_p} < \infty$ tvoří prostor l_p.

Signály

Omezíme se na signály ve spojitém čase, které obsahují konečný počet delta distribucí $\delta(t)$ nebo jejich derivací všech konečných řádů na každém konečném intervalu, a jsou po částech spojité spolu se svými derivacemi všech konečných řádů na každém konečném intervalu, na kterém nejsou delta distribuce;

funkce po částech spojitá je z L_p a distribuční část je z l_p.

Systémy

Systém je trojice (*U*, *Y*, *R*), kde *U* je množina vstupních signálů, *Y* je množina výstupních signálů a $R \subset U \times Y$ je relace systému.

Omezíme se na systémy lineární, časově invariantní, kauzální, diferenciální (spojité v čase) nebo diferenční (diskrétní v čase), jejichž vstupy jsou nulové pro záporné časy.

Vstup a výstup takových systémů je vázán konvolucí.

Systémy

Přenos spojitého systému je Laplaceova transformace jeho odezvy $g(t)$ na vstup $\delta(t)$,

$$G(s) = \int_0^\infty g(t) e^{-st} dt.$$

Přenos diskrétního systému je z-transformace jeho odezvy $g(k)$ na vstup $\Delta(k)$,

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) z^{-k}.$$

Přenosy námi uvažovaných systémů jsou racionální funkce v s nebo z.

Stabilita

Definic stability je řada,
v kontextu uvažovaných systémů je přirozené požadovat,
aby systém při průchodu signálu zachovával prostor funkcí.

Tedy

spojitý systém je L_p stabilní, jestliže pro každé $u \in L_p$ je $y \in L_p$,

diskrétní systém je l_p stabilní, jestliže pro každé $u \in l_p$ je $y \in l_p$.

Stabilita

Nejvíce používaná je stabilita L_∞ / l_∞,
kdy omezený vstup generuje omezený výstup co do amplitudy.

Systém s racionálním přenosem $G(s)$ je L_∞ stabilní
právě když $G(s)$ je ryzí (nemá pól v $s = \infty$) a stabilní (nemá pól v $\operatorname{Re} s \geq 0$).
Systém s racionálním přenosem $G(z)$, který předpokládáme ryzí, je l_∞ stabilní
právě když $G(z)$ je stabilní (nemá pól v $|z| \geq 1$).

Pokud je systém minimální realizací svého přenosu,
pak stabilita L_∞ / l_∞ je ekvivalentní exponenciální stabilitě systému.

Podílové těleso

Podílové těleso K oboru integrity A
je nejmenší těleso, které okruh A obsahuje.

Prvky K mají podobu n/d, kde n a d jsou prvky A a $d \neq 0$.

Pokud ztotožníme prvek $n/1 \in K$ s prvkem $n \in A$,
tak můžeme říci, že K obsahuje A.

Podílové těleso

Těleso $R(\mathrm{s})$ racionálních funkcí komplexní proměnné,
které je množinou přenosů námi uvažovaných systémů,
je podílovým tělesem oboru integrity $R[\mathrm{s}]$ polynomů,

ale také podílovým tělesem
oboru integrity $R_p(s)$ ryzích racionálních funkcí (nemá pól v $s = \infty$)
oboru integrity $R_s(s)$ stabilních racionálních funkcí (nemá pól v $\mathrm{Re}\, s \geq 0$)
nebo oboru integrity $R_{ps}(s)$ stabilních a ryzích racionálních funkcí.

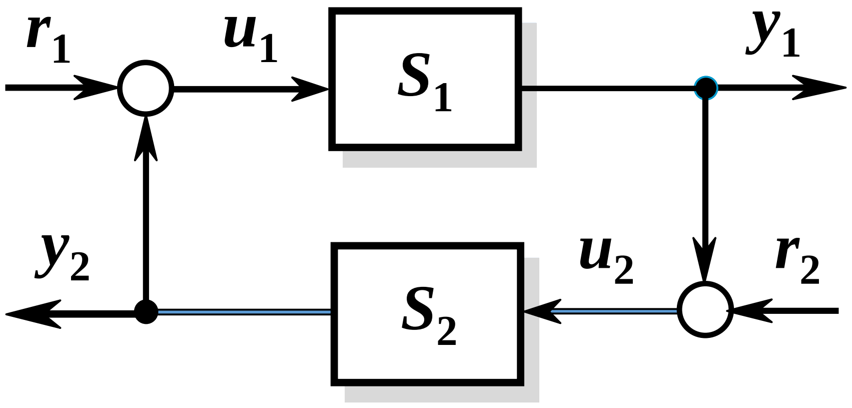
Podílové těleso

Systém s rozprostřenými parametry může mít přenos $G(s)$, který je například meromorfní funkcí proměnné s.

Těleso $M(s)$ meromorfních funkcí
je podílovým tělesem (v oblasti $s \neq \infty$)
oboru integrity E celistvých funkcí,
ale také podílovým tělesem (v oblasti $\mathrm{Re}\, s > 0$)
oboru integrity H_∞ funkcí omezených a holomorfních v $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Zpětnovazební systémy

Systém S_1 řídíme prostřednictvím systému S_2 (regulátoru) vytvořením zpětnovazebního systému.



Zpětnovazební systémy

Stabilita L_∞ / l_∞ je charakterizována přenosem systému.

Budeme proto pracovat s přenosy.
Označíme G_1 přenos systému S_1 a G_2 přenos systému S_2.

Předpokládáme, že G_1 a G_2 jsou racionální funkce.
Přenos diskrétního systému navíc předpokládáme ryzí racionální,
jinak by systém nebyl kauzální.

Zpětnovazební systémy

Budeme předpokládat, že zpětnovazební systém je dobře definovaný.
Znamená to, že přenos zpětnovazebního systému
mezi vstupy r_1, r_2 a výstupy y_1, y_2 (nebo u_1, u_2) existuje
(jmenovatel přenosu není nula).

Diskrétní zpětnovazební systém musí mít přenos striktně ryzí
(regulátor potřebuje konečnou dobu na výpočet akčního zásahu,
neboli akční zásah již nemůže ovlivnit signál, ze kterého byl zásah vypočítán).

Zpětnovazební systémy

Pro studium stability zpětnovazebních systémů je vhodné vyjádřit přenosy systémů ve tvaru stabilních ryzích racionálních zlomků,

$$G = N\,/\,D \quad \text{pro nesoudělné prvky } N, D \in R_{ps}(s)$$

například

$$G(s) = (s+1)/(s^2+1), \quad N(s) = (s+1)/(s+\lambda)^2, \quad D(s) = (s^2+1)/(s+\lambda)^2,$$

pro libovolné reálné číslo $\lambda > 0$.

Prvky z $R_{ps}(s)$ jsou nesoudělné, právě když nemají společné nuly v $s = \infty$ a v $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Stabilita zpětnovazebního systému

Nechť $G_1 = B / A$ a $G_2 = Q / P$ jsou nesoudělné zlomky v $R_{ps}(s)$.
Potom zpětnovazební systém je (L_∞) stabilní tehdy a jen tehdy,
když $U := AP - BQ$ je dělitelem jednotky v $R_{ps}(s)$.

Vyplývá z přenosu

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - G_1 G_2} \begin{bmatrix} G_1 & G_1 G_2 \\ G_2 G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{AP - BQ} \left(\begin{bmatrix} B \\ A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & Q \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

který má být stabilní ryzí racionální matice.

Stabilizující regulátor

Regulátor S_2 s racionálním přenosem $G_2 = Q / P$
stabilizuje daný systém S_1 s racionálním přenosem $G_1 = B / A$
tehdy a jen tehdy, když G_2 lze vyjádřit ve tvaru $G_2 = -Y / X$,
kde $X \neq 0$ a Y jsou stabilní ryzí racionální funkce,
které splňují Bézoutovu rovnici $AX + BY = 1$.

Stačí položit

$$X := P / U, \quad Y := -Q / U, \quad \text{kde } U := AP - BQ$$

a

$$G_2 = -Y / X = Q / P.$$

Obecné řešení Bézoutovy rovnice

Jestliže X, Y je partikulární řešení Bézoutovy rovnice $AX + BY = 1$
nad oborem integrity $R_{ps}(s)$,
pak obecné řešení této rovnice má tvar $X + BW$, $Y - AW$,
kde W je libovolný prvek oboru integrity $R_{ps}(s)$.

Platí

$$A(X + BW) + B(Y - AW) = AX + BY = 1.$$

Parametrizace všech stabilizujících regulátorů

Dán systém S_1 s přenosem $G_1 = B/A$,

kde $A \neq 0$ a B jsou nesoudělné prvky $R_{ps}(s)$.

Buď X a Y prvky $R_{ps}(s)$, které splňují Bézoutovu rovnici $AX + BY = 1$.

Potom množina všech regulátorů S_2, které stabilizují daný systém,

je dána množinou přenosů

$$G_2 = -(Y - AW)/(X + BW)$$

kde W je libovolný prvek $R_{ps}(s)$ takový, že $X + BW \neq 0$.

Poznámky

Každému parametru W odpovídá jeden stabilizující regulátor G_2
a naopak každému G_2 odpovídá jeden parametr $W = (Y + G_2 X) / (A - G_2 B)$.

Pro každý systém G_1 existuje tolik stabilizujících regulátorů G_2,
kolik je stabilních ryzích racionálních funkcí.

K danému systému G_1 existují stabilizující regulátory
libovolně vysokého řádu.

Příklad 1

Pokud S_1 je integrátor s přenosem $G_1(s) = 1/s$,
položme například $A(s) = s/(s+1)$, $B(s) = 1/(s+1)$
a řešme rovnici $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = 1$.

Nabízí se řešení $X(s) = 1$, $Y(s) = 1$ a všechny stabilizující regulátory mají přenos

$$G_2(s) = -\frac{1 - \frac{s}{s+1}W(s)}{1 + \frac{1}{s+1}W(s)}$$

pro libovolný stabilní ryzí racionální parametr W.

Množina přenosů G_2 nezávisí na výběru A, B ani na výběru X, Y.

Příklad 2

Pokud S_1 je diferenciátor s přenosem $G_1(s) = s$,
položíme například $A(s) = 1 / (s+1)$, $B(s) = s / (s+1)$
a řešíme opět rovnici $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = 1$.

Nabízí se řešení $X(s) = 1$, $Y(s) = 1$ a všechny stabilizující regulátory mají přenos

$$G_2(s) = -\frac{1 - \frac{1}{s+1}W(s)}{1 + \frac{s}{s+1}W(s)}$$

pro libovolný stabilní ryzí racionální parametr W.
Například parametru $W(s) = 0$ odpovídá regulátor $G_2(s) = -1$.

Příklad 3

Pokud S_1 je sumátor s přenosem $G_1(z) = z / z - 1$,
položíme například $A(z) = (z - 1) / z$, $B(z) = 1$
a řešíme rovnici $A(z)X(z) + B(z)Y(z) = 1$.

Volíme $Y(z)$ striktně ryzí, například $X(z) = 1$, $Y(z) = 1 / z$,
pak všechny stabilizující regulátory mají přenos

$$G_2(s) = -\frac{\frac{1}{z} - \frac{z-1}{z} W(z)}{1 + W(z)},$$

který je striktně ryzí pro každý stabilní striktně ryzí racionální parametr W.

Historie

Již

Newton G, Gould L, Kaiser JF. Analytic Design of Linear Feedback Controls. Wiley: New York, 1957.

**si všimli, že pokud má být zpětnovazební systém stabilní,
přenos $G_1G_2/(1-G_1G_2)$ musí obsahovat nestabilní nuly G_1
a přenos $1/(1-G_1G_2)$ musí obsahovat nestabilní póly G_1.**

**Tyto přenosy se tradičně nazývají
přenos odchylky $G_e := 1/(1-G_1G_2)$
přenos výstupu $G_y := G_1G_2/(1-G_1G_2)$.**

Historie

Následně

Strejc V. Syntéza regulačních obvodů s číslicovým počítačem. ČSAV: Praha, 1965.

si všimnul, že rozdíl těchto přenosů je

$$G_e - G_y = 1/(1 - G_1G_2) - G_1G_2/(1 - G_1G_2) = 1$$

a spojil obě podmínky do jediné podmínkové rovnice stability a

Kučera V. Stability of discrete linear feedback systems. Preprints 6th IFAC Congress, Boston, 1975.

formuloval tuto podmínku jako Bézoutovu rovnici
nad oborem integrity stabilních a ryzích racionálních funkcí.

Historie

Když

Youla DC, Bongiorno JJ, Jabr HA. Modern Wiener–Hopf design of optimal controllers, Part I: The single-inputcase. IEEE Transactions on Automatic Control, 21, 3–14, 1976.

hledali optimální regulátor, který zároveň systém stabilizuje,
tak parametrizovali všechny přenosy ve stabilním zpětnovazebním systému
a našli optimální hodnotu parametru.

Nepřímo tak objevili parametrizaci všech stabilizujících regulátorů
a navíc ukázali, jak parametr využít při optimalizaci.

Historie

Následně

Kučera V. Discrete Linear Control: The Polynomial Equation Approach. Wiley: Chichester, 1979.

si uvědomil, že všechna řešení Bézoutovy rovnice lze parametrizovat,
a vyjádřil všechny stabilizující regulátory
v kompaktním parametrickém tvaru

$$G_2 = -(Y - AW)/(X + BW).$$

Tento tvar se dnes objevuje v učebnicích teorie řízení.

Historie

**Parametrizace tedy není výsledkem spolupráce,
ale objevu téhož ve zhruba stejnou dobu a zcela různými postupy.
Zprvu si autoři plně neuvědomovali význam tohoto výsledku. Teprve**

Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Factorization Approach. MIT: Cambridge, MA, 1985.

**ukázal, že výsledek otevírá zcela novou oblast výzkumu
s aplikacemi při návrhu optimálních a robustních systémů.**

Označení „Youla-Kucera Parametrization“ poprvé použil

Anderson BDO. From Youla–Kucera to identification, adaptive and nonlinear control. Automatica, 34, 1485–1506, 1998.

Parametrizace zpětnovazebních přenosů

Všechny přenosy stabilního zpětnovazebního systému

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{1-G_1G_2}\begin{bmatrix} G_1 & G_1G_2 \\ G_2G_1 & G_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B(X+BW) & B(Y-AW) \\ B(Y-AW) & A(Y-AW) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

závisejí na W lineárně, zatímco na G_2 závisejí nelineárně.

Proto je snazší hledat parametr W namísto regulátoru G_2,
když chceme splnit dodatečné požadavky na zpětnovazební systém.

Pólový polynom zpětnovazebního systému

Stabilita alokuje póly systému (= póly jeho přenosu) kdekoli v oblasti Re s < 0.
Do konkrétních pozic lze póly umístit volbou parametru.

Dán systém $G_1 = B/A$ pro nesoudělné prvky $A, B \in R_{ps}(s)$
a množina jeho stabilizujících regulátorů

$$G_2 = -(Y - AW)/(X + BW)$$

kde stabilní ryzí racionální X, Y splňují Bézoutovu rovnici $AX + BY = 1$
a W je libovolná stabilní ryzí racionální funkce taková, že $X + BW \neq 0$.

Pólový polynom zpětnovazebního systému

Vyjádříme A, B a X, Y ve tvaru nesoudělných polynomiálních zlomků

$$A = a/\delta_1,\ B = b/\delta_1, \quad X = x/\delta_2,\ Y = y/\delta_2$$

a $W = (\delta_1/\delta_2)(w/d)$ pro polynomiální parametry w, d,

kde d je stabilní polynom (všechny nuly v oblasti $\operatorname{Re} s < 0$).

Povšimněme si, že $ax + by = \delta_1\delta_2$

a definujme polynomy x', y' splňující $ax' + by' = 1$.

Spolu jsou vázány vztahem

$$x = \delta_1\delta_2 x' + bt, \quad y = \delta_1\delta_2 y' - at, \quad t \text{ je polynom.}$$

Pólový polynom zpětnovazebního systému

Dosazením za x a y do G_2 získáme

$$G_2 = -\frac{\delta_1\delta_2 dy' - a(t+w)}{\delta_1\delta_2 dx' + b(t+w)}.$$

Položme $t + w = \delta_1\delta_2 w'$, kde w' je nějaký polynom, potom

$$G_2 = -\frac{dy' - aw'}{dx' + bw'} := -\frac{q}{p}$$

a pólový polynom zpětnovazebního systému je

$$ap - bq = adx' + bdy' = (ax' + by')d = d.$$

Pólový polynom zpětnovazebního systému

Považujeme-li vztah $t + w = \delta_1\delta_2 w'$ za rovnici pro polynomy w, w' můžeme vybrat řešení, které má vlastnost $w / \delta_1\delta_2$ je striktně ryzí. Potom W je ryzí tehdy a jen tehdy, když

$$d \geq 2\delta_1 - 1.$$

Znamená to, že volbou W můžeme zpětnovazebnímu systému vnutit libovolný pólový polynom d dostatečně vysokého stupně.
Polynom w' přitom představuje stupně volnosti regulátoru G_2 při alokaci pólů definovaných pólovým polynomem d.

Asymptotické vlastnosti systému

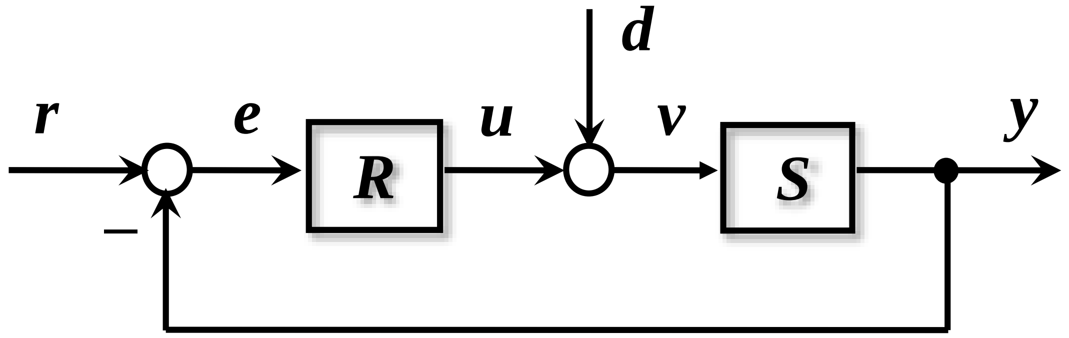
Návrh asymptotických vlastností systému typicky zahrnuje možnosti

- **asymptoticky sledovat danou třídu referenčních signálů**
- **asymptoticky eliminovat danou třídu poruch.**

Asymptotické vlastnosti systému

Asymptotické sledování reference *r* výstupem *y* znamená, že odchylka *e* s rostoucím časem konverguje k nule.

Nadále budeme používat značení obvyklé v teorii řízení.



Asymptotická eliminace poruchy *d* na výstupu *y* znamená, že její vliv na výstup *y* s rostoucím časem konverguje k nule.

Asymptotické vlastnosti systému

Pro přenosy to znamená, že

$$e(s)=\left[1/(1+SR)\right]r(s):=G_e(s)r(s)$$

$$y(s)=\left[S/(1+SR)\right]d(s):=G_y(s)d(s)$$

jsou stabilní ryzí racionální funkce.

Postupné zajištění obou těchto vlastností ukážeme na příkladu.

Příklad 5

Dán systém s přenosem $S(s) = 1/(s-1)$.

Nejprve zajistíme stabilitu.
Zvolíme například $A(s) = (s-1)/(s+1)$, $B(s) = 1/(s+1)$,
a řešíme rovnici $A(s)X(s) + B(s)Y(s) = 1$.

Řešení je například $X(s) = 1$, $Y(s) = 2$ a všechny stabilizující regulátory mají přenos

$$R(s) = \frac{2 - \frac{s-1}{s+1} W(s)}{1 + \frac{1}{s+1} W(s)}$$

pro libovolný stabilní ryzí racionální parametr W.

Příklad 5

Pro sledování skokové reference,

$r(s) = k/s$, k libovolné reálné číslo, je odchylka

$$e(s) = A(s)\left[X(s) + B(s)W(s)\right]r(s) = \frac{s-1}{s+1}\left[1 + \frac{1}{s+1}W(s)\right]\frac{s+1}{s}\frac{k}{s+1}.$$

Nestabilní faktor musí být absorbován, tedy platí Bézoutova rovnice

$$1 + \frac{1}{s+1}W(s) = \frac{s}{s+1}W_e(s)$$

pro nějaké stabilní ryzí racionální $W_e(s)$.

Příklad 5

Pro eliminaci harmonické poruchy s frekvencí ω,

$d(s) = (as + b)/(s^2 + \omega^2)$, a a b libovolná reálná čísla, je odchylka

$$y(s) = B(s)\left[X(s) + B(s)W(s)\right]d(s) = \frac{1}{s+1}\left[1 + \frac{1}{s+1}W(s)\right]\frac{(s+1)^2}{s^2+\omega^2}\,\frac{as+b}{(s+1)^2}.$$

Nestabilní faktor musí být absorbován, tedy platí Bézoutova rovnice

$$1 + \frac{1}{s+1}W(s) = \frac{s^2+\omega^2}{(s+1)^2}W_y(s)$$

pro nějaké stabilní ryzí racionální $W_y(s)$.

Příklad 5

Podmínky

$$1+\frac{1}{s+1}W(s)=\frac{s}{s+1}W_e(s),\quad 1+\frac{1}{s+1}W(s)=\frac{s^2+\omega^2}{(s+1)^2}W_y(s)$$

znamenají, že volbou W_e a W_y
lze odděleně zajistit sledování reference a eliminaci poruchy.

Využitím nejmenšího společného násobku obou podmínek,

$$1+\frac{1}{s+1}W(s)=\frac{s(s^2+\omega^2)}{(s+1)^3}T(s),$$

pak volbou T dokážeme splnit oba požadavky současně.

Příklad 5

Nejjednodušší takový parametr $W(s)$ odpovídá volbě $T(s) = 1$,

$$W(s) = -\frac{3s^2 + (3-\omega^2)s + 1}{(s+1)^2},$$

vede na regulátor

$$R(s) = \frac{5s^3 + (6-\omega^2)s^2 + (4+\omega^2)s + 1}{s(s^2+\omega^2)},$$

a na odezvy

$$e(s) = k\frac{(s-1)(s^2+\omega^2)}{(s+1)^4} \text{ při } d(s) = 0, \qquad y(s) = \frac{(as+b)s}{(s+1)^4} \text{ při } r(s) = 0.$$

Minimalizace normy H_2

Místo eliminace (částečně známé) poruchy chceme alespoň minimalizovat vliv (neznámé) poruchy d na vybraný signál, definovaný přenosem G. Nechť d je libovolná funkce prostoru L_2. Potom

$$\|y\|_{L_\infty} \leq \|G\|_{H_2} \|d\|_{L_2}$$

kde

$$\|G\|_{H_2} := \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \, d\omega \right)^{1/2}$$

je norma H_2 v prostoru funkcí $R_{ps}(s)$ proměnné $s = \sigma + j\omega$.

Naše strategie je minimalizovat $\|G\|_{H_2}$ přes všechny stabilizující regulátory.

Minimalizace normy H_2

Norma $\|G\|_{H_2} < \infty$ právě když G je striktně ryzí a nemá póly na imaginární ose.

**Řekněme, že chceme minimalizovat vliv d na výstup regulátoru $u = G_u d$,
kde $G_u = -SR / (1 + SR)$.**

**Všechny stabilizující regulátory jsou $R = (Y - AW) / (X + BW)$,
kde X a Y splňují $AX + BY = 1$
a W je libovolný stabilní ryzí racionální parametr takový, že $X + BW \neq 0$.
Zvolený přenos tedy závisí na parametru takto**

$$G_u = -B(Y - AW) := N + MW.$$

Minimalizace normy H_2

Nechť
$$M(s) = M_i(s)M_o(s),$$

kde M_i splňuje vztah $M_i(-s)\,M_i(s) = 1$ a M_o je dělitelem jednotky v $R_{ps}(s)$. Někdy nazýváme M_i fázotoč a M_o faktor s minimální fází.

Pro jednoduchost označme $M_i^*(s) := M_i(-s)$. Minimalizovaná norma je

$$\|G_u\|_{H_2}^2 = \|N + MW\|_{H_2}^2 = \|M_i(M_i^* N + M_o W)\|_{H_2}^2 = \|M_i^* N + M_o W\|_{H_2}^2$$

neboť její velikost je invariantní vůči násobení M_i.

Minimalizace normy H_2

Další krok je dekompozice

$$M_i^* N = \left\{ M_i^* N \right\}_+ + \left\{ M_i^* N \right\}_-$$

kde $\left\{ M_i^* N \right\}_+$ **je stabilní ryzí a** $\left\{ M_i^* N \right\}_-$ **je nestabilní a striktně ryzí.**

Smíšené členy nepřispívají k velikosti normy, a proto

$$\left\| G_u \right\|_{H_2}^2 = \left\| \left\{ M_i^* N \right\}_- \right\|_{H_2}^2 + \left\| \left\{ M_i^* N \right\}_+ + M_o W \right\|_{H_2}^2 .$$

Minimalizace normy H_2

První člen normy nezávisí na W, takže

$$\min_W \left\| G_u \right\|_{H_2} = \left\| \left\{ M_i^* N \right\}_- \right\|_{H_2}$$

a toto minimum nastává pro

$$W(s) = -\frac{\left\{ M_i^* N \right\}_+}{M_o}.$$

Optimální W je skutečně stabilní a ryzí racionální funkce pokud existuje M_o dělitel jednotky v $R_{ps}(s)$; úloha má pak jediné řešení.

Příklad 6

Dán systém s přenosem $S(s) = (s - 2) / (s - 1)$.
Úkolem je nalézt stabilizující regulátor,
který minimalizuje normu H_2 přenosu $G_u = SR / (1 + SR)$.

Množina stabilizujících regulátorů je

$$R(s) = \frac{-\frac{4}{s+1} - \frac{s-1}{s+1} W(s)}{\frac{s+7}{s+1} + \frac{s-2}{s+1} W(s)}$$

pro libovolný stabilní ryzí racionální parametr W.

Příklad 6

Dosažitelné přenosy G_u závisejí na parametru W podle vztahu

$$G_u(s) = 4\frac{s-2}{(s+1)^2} + \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}W(s).$$

Faktorizace dává

$$M_i(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)(s+2)}, \quad M_o = \frac{s+2}{s+1}$$

a dekompozice je

$$M_i^* N = \frac{s+2}{s+1}\frac{4}{s-1} = -\frac{2}{s+1} + \frac{6}{s-1}.$$

Příklad 6

Norma přenosu tedy nabývá minima pro

$$W(s) = -\frac{2}{s+2}.$$

Optimální regulátor je

$$R(s) = \frac{6}{s+10},$$

odpovídající přenos poruchy

$$G_u(s) = \frac{6}{s+1}\frac{s-2}{s+2}.$$

a minimální norma přenosu

$$\min_W \left\|G_v\right\|_{H_2} = \left\|\tfrac{6}{s+1}\right\|_{H_2} = \tfrac{6}{\sqrt{2}}.$$

Dosažení konečné impulsní odezvy

Diskrétní systém má konečnou impulsní odezvu, jestliže její z-transformace je polynom v z^{-1}, neboli má póly pouze v bodu $z = 0$.

Dosažení konečné impulsní odezvy zpětnovazebního systému je tedy zvláštním případem úlohy o umístění pólů. Nejkratší možnou impulsní odezvu dosáhneme takovou volbou W, která minimalizuje stupně polynomů v z^{-1} v přenosu zpětnovazebního systému.

Příklad 7

Dán diskrétní systém s přenosem $S(z) = (z - 1.5z^2) / (z - 2)^2$.

Zvolíme například $A(z) = (z-2)^2 / z^2$, $B(z) = (1 - 1.5z) / z$,

a řešíme rovnici $A(z)X(z) + B(z)Y(z) = 1$.

Pro $Y(z)$ striktně ryzí je například

$$X(z) = (z^2 - 0.5z) / z^2, \quad Y(z) = (-3z + 2) / z^2$$

a všechny stabilizující regulátory mají přenos

$$R(z) = \frac{\frac{-3z+2}{z^2} - \frac{z^2-4z+4}{z^2} W(z)}{\frac{z^2-0.5z}{z^2} + \frac{-1.5z+1}{z} W(z)}$$

pro libovolný stabilní striktně ryzí racionální parametr W.

Příklad 7

Přenosy zpětnovazebního systému (píšeme v proměnné z^{-1}) jsou

$$1/(1+SR)=A(X+BW)=1-4.5z^{-1}+6z^{-2}-2z^{-3}+(1-4z^{-1}+4z^{-2})(-1.5+z^{-1})W(z)$$

$$S/(1+SR)=B(X+BW)=-1.5+1.75z^{-1}-0.5z^{-2}+(-1.5+z^{-1})^{2}W(z)$$

$$R/(1+SR)=A(Y-AW)=-3z^{-1}+14z^{-2}-20z^{-3}+8z^{-4}-(1-4z^{-1}+4z^{-2})^{2}W(z)$$

$$SR/(1+SR)=B(Y-AW)=4.5z^{-1}-6z^{-2}+2z^{-3}-(-1.5+z^{-1})(1-4z^{-1}+4z^{-2})W(z)$$

Všechny přenosy jsou polynomy v z^{-1} právě tehdy, když $W = z^{-1}w$, kde w je libovolný polynom v z^{-1}.

Příklad 7

Nejkratší impulsní odezvy odpovídají volbě *W*(z) = 0.

Potom

$$R(z) = \frac{-3z+2}{z^2-0.5z} = \frac{-3z^{-1}+2z^{-2}}{1-0.5z^{-1}}$$

a

$$1/(1+SR) = 1-4.5z^{-1}+6z^{-2}-2z^{-3}$$

$$S/(1+SR) = -1.5+1.75z^{-1}-0.5z^{-2}$$

$$R/(1+SR) = -3z^{-1}+14z^{-2}-20z^{-3}+8z^{-4}$$

$$SR/(1+SR) = 4.5z^{-1}-6z^{-2}+2z^{-3}$$

Minimalizace normy l_1

Pokud chceme minimalizovat vliv vytrvalé neznámé poruchy,
tak předpokládáme, že d je funkce z prostoru L_∞, v diskrétním případě l_∞.
Potom pro vybraný signál zpětnovazebního systému s impulsní odezvou g platí

$$\| y \|_{L_\infty} \leq \| g \|_{L_1} \| d \|_{L_\infty}$$

případně

$$\| y \|_{l_\infty} \leq \| g \|_{l_1} \| d \|_{l_\infty}$$

a naše strategie
je minimalizovat $\|g\|_{L_1}$ nebo $\|g\|_{l_1}$ přes všechny stabilizující regulátory.

Minimalizace normy l_1

Soustřeďme se na diskrétní případ, spojitý je složitější.
Řekněme, že chceme minimalizovat vliv d na vstupu systému $v = G_v d$, kde $G_v = 1 / (1 + SR)$.

Dosažitelné přenosy G_v ve stabilizovaném zpětnovazebním systému jsou

$$G_v = A(X + BW)$$

pro libovolný stabilní striktně ryzí racionální parametr W.

Normu $\|g\|_{l_1}$ budeme tedy minimalizovat vhodným výběrem W.

Minimalizace normy l_1

Norma $\|g_v\|_{l_1} < \infty$ právě když A ani B nemají nuly na imaginární ose.

Optimální impulsní odezva g_v není jediná, ale je konečná,

takže přenos G_v je polynom v z^{-1}.

Vyjádříme proto všechny stabilní a ryzí racionální přenosy

ve tvaru polynomů v z^{-1},

což jsou vlastně stabilní a ryzí racionální funkce s póly v $z = 0$.

Minimalizace normy l_1

Nechť $A = A^+A^-$ a $B = B^+B^-$,
kde A^- a B^- zahrnují všechny nuly A a B v oblasti $\mathrm{Re}\, z > 0$.
Potom

$$G_v = A(X + BW)$$

bude polynom v z^{-1} právě tehdy,
když $W = z^{-1}w \,/\, A^+B^+$ pro libovolný polynom w proměnné z^{-1}
a minimalizace normy l_1 je lineární program pro koeficienty polynomu w.

Optimální regulátor nezajišťuje konečnou impulsní odezvu
pro všechny přenosy zpětnovazebního systému.

Příklad 8

Dán diskrétní systém s přenosem $S(z) = (z - 1.5z^2) / (z - 2)^2$.

Zvolíme $A(z) = (z - 2)^2 / z^2 = 1 - 4z^{-1} + 4z^{-2}$, $B(z) = (z - 1.5z^2) / z^2 = -1.5 + z^{-1}$,

a řešíme rovnici $A(z)X(z) + B(z)Y(z) = 1$.

Pro $Y(z)$ striktně ryzí je například

$$X(z) = 1 - 0.5z^{-1}, \; Y(z) = -3z^{-1} + 2z^{-2}$$

a stabilizující regulátory mají přenos

$$R(z) = \frac{-3z^{-1} + 2z^{-2} - (1 - 4z^{-1} + 4z^{-2})W(z)}{1 - 0.5z^{-1} + (-1.5 + z^{-1})W(z)}$$

pro libovolný stabilní striktně ryzí racionální parametr W.

Příklad 8

Dosažitelné přenosy G_v jsou

$$G_v = A(X+BW) = 1-4.5z^{-1}+6z^{-2}-2z^{-3}+(1-4z^{-1}+4z^{-2})(-1.5+z^{-1})W(z)$$

a volbou parametru

$$W(z^{-1}) := z^{-1}w(z^{-1})/(-1.5+z^{-1}), \quad w \text{ libovolný polynom v } z^{-1}$$

získáme polynomiální přenosy G_v ve tvaru

$$G_v = A(X+BW) = 1-4.5z^{-1}+6z^{-2}-2z^{-3}+(1-4z^{-1}+4z^{-2})z^{-1}w(z).$$

Příklad 8

Polynom w **vypočteme lineárním programem,**

který minimalizuje $q = r_0 + r_1 + r_2 + r_3$

za podmínky $-r_i \le g(i) \le r_i$ **a** $r_i \ge 0,\ \ i = 0,1,2,3$

kde

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4.5 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \\ 4 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ w_1 \end{bmatrix}.$$

Výsledek $w_1 = 1.5$ **.**

Příklad 8

Odpovídající parametr $W(z) = 1.5z^{-1} / (-1.5 + z^{-1})$

vede na optimální regulátor

$$R(z) = \frac{3z^{-1} - 4z^{-3}}{(1+z^{-1})(-1.5+z^{-1})}$$

a na optimální přenos poruchy *d* na vstup systému *v*

$$G_v(z) = 1 - 3z^{-1} + 4z^{-3}.$$

Minimální norma je $\|g_v\|_{l_1} = 8$.

Pojem robustnosti

Robustnost znamená, že vlastnost,
kterou regulátor zajišťuje pro nominální systém S,
zajistí zároveň pro celou třídu systémů S_Δ .

Skutečný systém se totiž může lišit od nominálního.
Skutečný systém neznáme, ale můžeme zajistit,
aby vlastnost byla splněna pro každý systém z okolí S_Δ nominálního systému.
Tím nepřímo zajistíme splnění požadavku i pro skutečný systém,
pokud z množiny S_Δ nevybočuje.

Pojem robustnosti

Robustnost je tedy vztažena na konkrétní vlastnost a je vázána na definované okolí nominálního systému.

Množina S_Δ zohledňuje neurčitost modelu systému S.
Můžeme ji popsat parametricky,
jako meze parametrů nominálního systému,
nebo neparametricky,
prostřednictvím velikosti okolí frekvenční charakteristiky systému
(Fourierovy transformace impulsní odezvy systému).

Robustní umístění pólů při parametrické neurčitosti

Ukážeme na příkladu.

Je dán nominální systém s přenosem

$$S(s) = \frac{k}{\tau s + 1}, \quad k = 88, \ \tau = 194.$$

Máme k dispozici proporcionálně-integrační regulátor s nastavitelnými konstantami α a β

$$R(s) = \alpha + \frac{\beta}{s}.$$

Robustní umístění pólů při parametrické neurčitosti

Položíme například

$$A(s)=\frac{\tau s+1}{s+1},\ B(s)=\frac{k}{s+1},\quad X(s)=\frac{s}{s+1},\ Y(s)=\frac{\alpha s+\beta}{s+1}.$$

Zpětnovazební systém bude stabilní, právě když

$$U(s):=A(s)X(s)+B(s)Y(s)=\frac{\tau s^2+(1+\alpha k)s+k\beta}{(s+1)^2}$$

je dělitelem jednotky v $R_{ps}(s)$; to jest když koeficienty čitatele jsou kladné.

Robustní umístění pólů při parametrické neurčitosti

Připusťme, že zesílení systému je neurčité, leží v intervalu $84 \le k \le 92$.

Tím je definováno okolí nominálního systému

$$S_{\Delta} := \left\{ \frac{k}{\tau s+1} : 84 \le k \le 92, \tau = 194 \right\}.$$

Úkolem je nastavit regulátor tak, aby póly zpětnovazebního systému

byly umístěny v kruhu $\left| s-\sqrt{2} \right| < 1$, a to pro každý systém z množiny S_{Δ}.

Robustní umístění pólů při parametrické neurčitosti

Danou oblast lze transformovat na oblast stability $\operatorname{Re} w < 0$

pomocí konformního zobrazení

$$w = \frac{s+b}{s+a},\ \ a = \sqrt{2}+1,\ \ b = \sqrt{2}-1$$

a úlohu tak převést na úlohu robustní stabilizace pro systém

$$S'(w) = \frac{-kw+k}{(\tau a-1)w-(\tau b-1)}$$

a regulátor

$$R'(s) = \frac{(\alpha a-\beta)w-(\alpha a-\beta)}{aw-b}.$$

Robustní umístění pólů při parametrické neurčitosti

Odpovídající podmínky stability

$$\begin{bmatrix} \tau a^2 - a & -ak & k \\ a + b - 2ab\tau & ak + bk & -2k \\ \tau b^2 - b & -bk & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix} > 0$$

je třeba vyřešit pro krajní hodnoty $k = 84$ a $k = 92$.
Množina řešení je konvexní útvar, v tomto případě trojúhelník vymezený třemi přímkami v rovině parametrů α a β.

Robustní stabilizace při neparametrické neurčitosti

Někdy je výhodné pracovat s kruhovým okolím nominálního systému *S*.
Okolí definujeme v komplexní rovině vztahem

$$S_\Delta = (1 + F\Delta)S,$$

kde F je pevná stabilní ryzí racionální funkce
a Δ je proměnná stabilní ryzí racionální funkce splňující $\|\Delta\|_{H_\infty} < 1$,
kde

$$\|\Delta(s)\|_{H_\infty} := \sup_\omega |\Delta(j\omega)|$$

je norma H_∞ definovaná pro funkce z $R_{ps}(s)$.

Robustní stabilizace při neparametrické neurčitosti

Okolí je definováno tak,

aby $F\Delta$ byla maximální relativní odchylka skutečného systému od 1

$$\frac{S_\Delta}{S} - 1 = F\Delta\,.$$

Protože $\|\Delta\|_{H_\infty} < 1$, pro všechny frekvence ω platí

$$\left|\frac{S_\Delta(j\omega)}{S(j\omega)} - 1\right| \le |F(j\omega)|$$

čili $|F(j\omega)|$ je amplitudový profil neurčitosti a Δ představuje vliv fáze.

Robustní stabilizace při neparametrické neurčitosti

Nyní předpokládejme, že regulátor *R* stabilizuje nominální systém *S*.
Potom *R* bude stabilizovat celou množinu systémů S_Δ tehdy a jen tehdy, když

$$\left\| \frac{SR}{1+SR} F \right\|_{H_\infty} < 1 .$$

Vyjádříme-li všechny stabilizující regulátory *R* pomocí parametru *W*, podmínka zní

$$\left\| B(Y - AW)F \right\|_{H_\infty} < 1.$$

Každé stabilní ryzí racionální *W* splňující tuto nerovnost definuje robustně stabilizující regulátor pro *S*.

Příklad 9

Uvažujme nominální systém

$$S(s) = \frac{s+1}{s-1}$$

s vědomím, že v systému existuje zpoždění ϑ,
o kterém pouze víme, že leží v intervalu $0 \le \vartheta \le 0.2$.

Systém tedy vnoříme do třídy systémů $S_\Delta := \left\{ \frac{s+1}{s-1} e^{-\vartheta s} \; : \; 0 \le \vartheta \le 0.2 \right\}$.

Příklad 9

Relativní neurčitost

$$\frac{S_{\Delta}}{S}-1=e^{-j\omega\vartheta}-1$$

lze majorizovat jednoduchým přenosem

$$F(s)=\frac{3s+1}{s+9}$$

tak, že amplituda frekvenční charakteristiky je v kruhu o poloměru $|F(j\omega)|$

$$\left|e^{-j\omega\vartheta}-1\right|\le\left|F(j\omega)\right|$$

a fáze odchylky není omezena.

Příklad 9

Všechny regulátory, které stabilizují nominální systém

$S(s) = (s + 1) / (s - 1)$, $A(s) = (s - 1) / (s + 1)$, $B(s) = 1$,

$A(s)X(s) + B(s)Y(s) = 1$, $X(s) = 0$, $Y(s) = 1$

jsou

$$R(s) = \frac{1 - \frac{s-1}{s+1} W(s)}{W(s)},$$

kde $W(s) \neq 0$ je stabilní ryzí racionální parametr.

Příklad 9

Podmínka robustní stability je

$$\left\| \frac{SR}{1+SR} F \right\|_{H_\infty} = \left\| B(Y - AW)F \right\|_{H_\infty} := \left\| N - MW \right\|_{H_\infty} < 1,$$

kde

$$N(s) = B(s)Y(s)F(s) = \frac{3s+1}{s+9}, \quad M(s) = B(s)A(s)F(s) = \frac{s-1}{s+1}\frac{3s+1}{s+9}.$$

Vypočteme

$$\min_W \left\| N - MW \right\|_{H_\infty} = \left| N(1) \right| = 0.4,$$

což je méně než 1.

Příklad 9

Minimalizujícímu parametru

$$\boldsymbol{W(s) = \frac{N(s) - N(1)}{M(s)} = 2.6\frac{s+1}{3s+1}}$$

tedy odpovídá robustně stabilizující regulátor

$$\boldsymbol{R(s) = \frac{4}{26}\frac{s+9}{s+1}.}$$

Protože norma je nejen menší než 1, ale je minimální,

tak *R* je nejlepší regulátor, který robustně stabilizuje daný systém.

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

Slabina postupného návrhu systémů řízení je,

že každá další specifikace nad rámec stability může zvýšit řád regulátoru.

Regulátory daného (nejlépe nízkého) řádu

lze nalézt řešením lineární maticové nerovností.

Řád systému je počet stavových proměnných potřebných k realizaci systému.

Pokud je zpětnovazební systém minimální realizací svého přenosu,

tak řád regulátoru je stupeň pólového polynomu *d*.

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

Kontrola stupně polynomu *d* v parametru *W* = *w* / *d* není jednoduchá.

Pokud je polynom *d* fixován, pak všechny přenosy zpětnovazebního systému jsou lineární v polynomu *w*.

Jestliže *d* není fixován, tak máme volnou ruku ve výběru *d*, ale narazíme na problém, že množina všech stabilních polynomů není konvexní v prostoru svých koeficientů.

Proto potřebujeme vnitřní konvexní aproximaci všech stabilních polynomů.

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

Předpokládejme, že známe jeden stabilizující regulátor R' daného systému S.
Hledáme jiný stabilizující regulátor R daného (nižšího) řádu m, pokud existuje.

Jestliže $S = B / A$, kde $A = a / \delta_1$, $B = b / \delta_1$ pro nesoudělné polynomy a, b
a jestliže $X = x / \delta_2$, $Y = y / \delta_2$ splňují $AX + BY = 1$,
tak všechny stabilizující regulátory mají tvar $R = (Y - AW) / (X + BW)$,
kde W je stabilní ryzí racionální parametr splňující $X + B W \neq 0$.

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

Nechť daný stabilizující regulátor je $R' = q / p$, pro nesoudělné polynomy p, q.

Druhý regulátor, $R = y / x$, je s ním vázán vztahem

$$\frac{q}{p} = \frac{yd - aw}{xd + bw}.$$

Platí tedy

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d & 0 & -p & b \\ 0 & d & -q & -a \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \\ d \\ w \end{bmatrix} = 0.$$

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

Nechť

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \\ d_1 & d_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix}$$

je polynomiální báze minimálního stupně jádra matice A.

Pak všechny stabilizující regulátory systému S lze vyjádřit ve tvaru

$$R = (\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) / (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2),$$

kde λ_1 a λ_2 jsou polynomy takové, že $\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$ je stabilní polynom.

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

Stabilizující regulátor řádu m existuje právě když

$$\deg \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = m.$$

Pro každý daný stabilní polynom c,

vnitřní konvexní aproximace množiny všech stabilních polynomů d

je dána množinou $H_c = \{ d : \ M_c(d) \geq 0 \}$,

kde $M_c(d) \geq 0$ je maticová lineární nerovnost pro koeficienty polynomů c a d.

Stabilizující regulátor daného řádu řádu

S využitím aproximativní množiny H_c můžeme výběrem polynomů λ_1 a λ_2 zajistit nízké stupně polynomů x_1 a x_2

$$\deg \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = m.$$

a zároveň stabilitu polynomu d

$$\begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = d.$$

Příklad 10

Uvažujme systém řádu 3 s přenosem

$$S(s) = \frac{1}{s(s^2 + s + 10)}$$

a stabilizující regulátor řádu 2 s přenosem

$$R'(s) = \frac{-26s^2 + 45s + 1}{s^2 + 4s - 4},$$

který umístí všech pět pólů zpětnovazebního systému do bodu $s = -1$.

Úkolem je nalézt stabilizující regulátor nižšího řádu.

Příklad 10

Minimální polynomiální báze jádra matice

$$A = \begin{bmatrix} (s+1)^5 & 0 & -(s^2+4s-4) & 1 \\ 0 & (s+1)^5 & -(26s^2-45s-1) & -s(s^2+s+10) \end{bmatrix}$$

je

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -26 \\ -1 & s^3+s^2+10s-26 \\ s^2+4s-4 & 149s-103 \end{bmatrix}.$$

Příklad 10

Všechny stabilizující regulátory jsou dány takovými polynomy λ_1 and λ_2 pro které je pólový polynom zpětnovazebního systému

$d = -\lambda_1 + \lambda_2(s^3 + s^2 + 10s - 26)$ stabilní.

Z prvních dvou řádků báze vyplývá existence stabilizujícího regulátoru řádu 0, k tomu stačí vybrat konstantní λ_1 a λ_2.

Z Hurwitzova kritéria stability pak vyplývá, že d je stabilní právě když $\lambda_1 \in (-36, -26)$ and $\lambda_2 = 1$.

Například $\lambda_1 = -30$ vede na regulátor nultého řádu $R(s) = 4$ a na pólový polynom zpětnovazebního systému $d(s) = s^3 + s^2 + 10s + 4$.

Příklad 10

V daném jednoduchém případě nebylo potřeba aproximovat množinu všech stabilních polynomů *d* prostřednictvím centrálního polynomu *c*, protože jsme našli exaktní řešení.

Samozřejmě, že vnitřní konvexní aproximace množiny stabilních polynomů vede na konzervativní řešení.

Shrnutí

Prezentovaná teorie je elegantní, jednoduchá a produktivní.

Parametrizace všech regulátorů, které stabilizují daný systém
je zajímavý výsledek sám o sobě,
navíc umožňuje snadno zajistit další požadavky nad rámec stability,
neboť přenosy zpětnovazebního systému závisejí na parametru lineárně,
zatímco na regulátoru závisejí nelineárně.

Shrnutí

Parametrizace se stala paradigmatem moderní teorie řízení systémů lineárních se soustředěnými parametry, ale i mnohem obecnějších.

Přenosy systémů s rozprostřenými parametry nejsou racionální a existenci nesoudělných zlomků nad okruhem nelze a priori předpokládat.
Stačí se však omezit na systémy,
jejichž přenos je z podílového tělesa Bézoutova oboru integrity;
v takovém oboru existuje řešení Bézoutovy rovnice.
Výsledné přenosy jsou dostatečně obecné; Bézoutovy obory jsou například celistvé funkce *E*, nebo holomorfních funkce omezené v normě H_∞ .

Další informace

Youla-Kucera parametrization – Wikipedia
https://en.wikipedia.org/wiki/Youla–Kucera_parametrization

Youla–Kucera parametrization – YouTube
https://www.youtube.com/watch?v=lpyiihb_cXY

Google nalezne 12200 výsledků k heslu Youla-Kucera